



ANTIFASCHISTISCHES
SCHUTZ-INSTITUT

für reflexive Gesellschaftsethik

Temporale Zahlenräume und Historienarithmetik

Von Zuständen zu Pfaden



$$\mathcal{N}(F, T) := \{f : T \rightarrow F \mid \text{supp}(f) := \{t \mid f(t) \neq 0\} \text{ endlich}\}.$$

$$A : \mathcal{N}(F, T) \rightarrow F, \quad A(f) = \sum_{t \in T} f(t)$$

$$\iota_{t_0}(x)(t) = \begin{cases} x, & t = t_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 99, & t = t_1, \\ 1, & t = t_2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 100, & t = t_1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Temporale Zahlenräume und Historienarithmetik:

Von Zuständen zu Pfaden

Abstract

Ausgehend von der Intuition, dass Ausdrücke wie „99 und 9 Neuntel“ gegenüber „100“ einen eigenständigen Bedeutungsgehalt haben, sobald die zeitliche Gestalt der Realisierung mitgedacht wird, wird ein erweiterter Zahlenbegriff entwickelt: temporale Zahlen. Diese werden nicht als punktförmige Werte auf einem Zahlenstrahl verstanden, sondern als Pfade mit expliziter Prozess- und Kontextstruktur. Der klassische Zugang über reelle Zahlen erscheint in diesem Rahmen als Grenzfall, in dem alle Pfadinformation auf einen Endwert „zusammengeflacht“ wird. Der Beitrag führt zunächst eine minimalistische formale Übersetzung in bekannte Strukturen (endlich unterstützte, zeitindizierte Vektorräume) ein und markiert diese als Andockstation für die Fachmathematik, nicht als erschöpfende Beschreibung. Darauf aufbauend werden Ebenenlogik, Historienarithmetik und die bewusste Nicht-Reduktion von Prozessen auf Endzustände als konstitutive Merkmale temporaler Zahlenräume herausgearbeitet. Abschließend wird die Positionierung im Spektrum etablierter mathematischer Konzepte diskutiert.

1. Ausgangspunkt: Wenn 99 und 9/9 nicht 100 ist

Der scheinbar provokante Satz, „99 und 9 Neuntel sei nicht gleich 100“, ist in der Arithmetik der reellen Zahlen falsch. Dort gilt die Identität

$$\begin{aligned} &[\\ 99 + \frac{9}{9} &= 99 + 1 = 100, \\ &] \end{aligned}$$

ohne Rest, ohne Ambivalenz. Diese Aussage setzt jedoch voraus, dass Zahlen ausschließlich als abstrakte Werte verstanden werden, losgelöst von der Art und Weise, wie sie entstehen. Sie sind dann punktförmige Zustände auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl.

Die alternative Intuition, die hier verfolgt wird, setzt an einem anderen Punkt an: In vielen realen Zusammenhängen ist es nicht gleichgültig, ob eine Größe „auf einen Schlag“ oder in mehreren Schritten realisiert wird. Zwischen „100 Einheiten jetzt“ und „99 Einheiten jetzt, 1 Einheit später“ liegt eine Zeitfuge, in der das System sich in einem Zustand des Noch-nicht-Ganzen befindet. Diese Fuge ist nicht bloß psychologisch relevant, sondern strukturell: In ihr kann abgebrochen, umgelenkt oder anders entschieden werden. Sie ist der Ort der Geschichte.

Die These lautet daher: Es gibt einen sinnvollen mathematischen Rahmen, in dem 99 und 9/9 nicht dasselbe Objekt ist wie 100, obwohl beide denselben aggregierten Wert haben. Der klassische Zahlenstrahl beschreibt dann nur den Quotientenraum, in dem alle Pfade mit gleichem Endwert identifiziert werden. Der temporale Zahlenraum hält die Pfade fest.

2. Temporale Zahlenräume als Übersetzung in bekannte Strukturen

Um die Konsistenz des Ansatzes zu sichern und Anschlussfähigkeit an etablierte Mathematik zu ermöglichen, bietet sich zunächst eine bewusst konservative Übersetzung in bekannte Strukturen an. Sie ist als formale Andockstation zu verstehen, nicht als letzte Wahrheit über temporale Zahlen.

Man wähle einen Grundzahlbereich (F) (typischerweise $(\mathbb{R})$ oder $(\mathbb{C})$) sowie eine nichtleere Menge (T), die als Zeit- oder Kontextmenge interpretiert wird. Ein einzelnes Zahlereignis wird durch ein Paar $((t, x))$ mit $(t \in T)$ und $(x \in F)$ repräsentiert: ein Wert (x) tritt in einem Kontext (t) auf.

Der temporale Zahlenraum in dieser minimalen Fassung ist dann der Raum endlich unterstützter Funktionen

```
[
\mathcal{N}(F, T) := \{ f : T \rightarrow F \mid \operatorname{supp}(f) := \{ t \mid f(t) \neq 0 \} \text{ endlich} \}.
]
```

Mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ist $(\mathcal{N}(F, T))$ ein Vektorraum über (F), isomorph zur direkten Summe $(\bigoplus_{t \in T} F)$. Die Abbildung

```
[
A : \mathcal{N}(F, T) \rightarrow F, \quad A(f) = \sum_{t \in T} f(t)
]
```

liefert den Gesamtwert einer temporalen Zahl als Summe ihrer Beiträge. Klassische Zahlen $(x \in F)$ können als temporale Zahlen ohne innere Zeitstruktur eingebettet werden, etwa über ein festes $(t_0 \in T)$ mit

```
[
\iota_{t_0}(x)(t) =
\begin{cases}
x, & \text{if } t = t_0, \\
0, & \text{sonst.}
\end{cases}
]
```

Diese Konstruktion zeigt: Der Gedanke temporaler Zahlen ist formal konsistent und lässt sich in bekannte Funktionsräume übersetzen. Sie beschreibt jedoch noch nicht den eigentlichen Kern des Konzepts, sondern rahmt ihn in einer Sprache, die Fachmathematik unmittelbar versteht.

3. Ebenen, Pfade und das Problem des „Flatten“

Entscheidend für das Konzept temporaler Zahlen ist weniger die Wahl des Trägerraums als die Frage, was als gleich gilt und welche Operationen legitim sind. Hier setzt die Analogie zu Ebenen (Layers) in Grafiksoftware an.

Eine Bilddatei mit Ebenen enthält zwei Ebenen von Information:

erstens das sichtbare Endbild,

zweitens die Historie seiner Entstehung: einzelne Layer, Masken, Effekte.

Der Schritt des „Flatten Image“ vernichtet die zweite Ebene: Es bleibt ein reines Zustandsobjekt. Für viele Anwendungen ist das ausreichend, aber irreversibel; spätere Änderungen sind nur noch grob möglich.

Übertragen auf Zahlen bedeutet dies: Der klassische Zahlenstrahl und die übliche Arithmetik arbeiten mit „geflatteten“ Zahlen. Der Pfad, der zu einem Wert geführt hat, ist nicht Teil des Objekts. In $(\mathcal{N}(F, T))$ existiert diese Pfadinformation explizit; die Aggregationsabbildung (A) spielt die Rolle des Flatten-Operators. Man kann nun wählen, ob man sie anwendet oder nicht.

Im Beispiel wählt man eine geordnete Zeitmenge (T) und zwei Zeitpunkte $(t_1 < t_2)$. Definiere zwei temporale Zahlen

```
[
f(t) =
\begin{cases}
99, & t = t_1, \\
1, & t = t_2, \\
0, & \text{sonst},
\end{cases}
\quad
g(t) =
\begin{cases}
100, & t = t_1, \\
0, & \text{sonst}.
\end{cases}
]
```

Es gilt $(A(f) = A(g) = 100)$, aber $(f \neq g)$. In der Ebene der reellen Zahlen würden beide durch den Flatten-Schritt (A) identifiziert. Im temporalen Zahlenraum bleiben sie auseinandergehalten.

Die konzeptionelle Entscheidung lautet: Man akzeptiert nicht mehr selbstverständlich die Reduktion auf den Endwert, sondern hält die Historienstruktur für wesentlich. Das „Nicht-Quotientieren“ ist hier kein technisches Detail, sondern eine bewusste Weigerung, Prozessinformation als vernachlässigbar zu betrachten.

4. Historienarithmetik: Rechnen mit Geschichten statt nur mit Zuständen

Die bisherige Konstruktion beschreibt temporale Zahlen als Objekte. Die eigentliche Verschiebung entsteht jedoch erst, wenn auch die Rechenarten diesem Begriff angepasst werden. In der klassischen Arithmetik operiert man mit Funktionen

```
[
f : F \to F,
]
```

die auf einem Zustand ansetzen und einen neuen Zustand liefern. Die Vorgeschichte des Zustands spielt dabei keine Rolle.

Für temporale Zahlen genügt eine solche Arithmetik nicht. Sinnvoll werden Operationen, die nicht nur den aktuellen Endwert verändern, sondern an der gesamten Geschichte ansetzen. Die Grundobjekte sind nun Pfade oder Historien, und Rechenarten sind Transformationen von Historien.

Formal lässt sich dies etwa als Operation

```
[
F : \mathcal{N}(F,T) \rightarrow \mathcal{N}(F,T)
]
```

fassen, die nicht auf $A(f)$, sondern direkt auf (f) operiert. Eine elementare Operation „+1“ kann dann so verstanden werden, dass sie einen weiteren Beitrag an einen neuen Zeitpunkt anhängt, statt den Wert 1 zu einem bereits „geflatteten“ Zustand zu addieren. Im Beispiel:

```
[
h(t) =
\begin{cases}
99, & \text{if } t = t_1, \\
0, & \text{sonst}
\end{cases}
\quad \xrightarrow{+1 \text{ als Historienoperator}} \quad
f(t) =
\begin{cases}
99, & \text{if } t = t_1, \\
1, & \text{if } t = t_2, \\
0, & \text{sonst}
\end{cases}
]
```

Die temporale Zahl nach der Operation dokumentiert nicht nur, dass nun ein Gesamtwert von 100 erreicht ist, sondern auch, dass dies über einen zweistufigen Pfad geschah. Eine alternative Operation könnte statt dessen (g) erzeugen, also 100 „in einem Schritt“ zum Zeitpunkt (t_1) . In der klassischen Arithmetik sind beide Operationen ununterscheidbar; in der Historienarithmetik sind sie fundamental verschieden.

Damit entsteht eine andere Sicht auf Arithmetik insgesamt: Nicht der nackte Endwert ist primärer Träger mathematischer Information, sondern die Sequenz von Schritten, die ihn generiert. Man rechnet nicht mehr nur mit Zuständen, sondern mit Geschichten.

5. Realer Teil und anarchischer Teil: Endwerte und Geschichte

Die Einführung temporaler Zahlenräume macht deutlich, dass jedes Zahlenobjekt mindestens zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen zulässt. Zum einen gibt es den Aggregatwert, der durch die Abbildung

```
[
A : \mathcal{N}(F,T) \rightarrow F, \quad A(f) = \sum_{t \in T} f(t)
]
```

ermittelt wird. Zum anderen gibt es die konkrete Prozessgestalt, die in der Funktion (f) selbst kodiert ist: in der Wahl der Zeitpunkte, in der Zerlegung in Beiträge, in der Länge und Struktur des Pfades.

Es bietet sich an, diese beiden Perspektiven begrifflich zu unterscheiden. Der durch (A(f)) bestimmte Endwert kann als „realer Teil“ einer temporalen Zahl bezeichnet werden: Er ist dasjenige, was nach der vollständigen Anwendung des Flatten-Operators übrig bleibt. Der „reale Teil“ ist damit derjenige Anteil einer temporalen Zahl, der in klassischen Zahlensystemen sichtbar wäre – etwa in einer Bilanz, in einer Kennzahl oder in einem Messergebnis.

Dem gegenüber steht der „anarchische Teil“ einer temporalen Zahl. Gemeint ist damit nicht Unordnung im trivialen Sinn, sondern die Gesamtheit der Pfadinformationen, die vom Aggregatwert gerade nicht erfasst werden: die Reihenfolge der Schritte, die Existenz von Zwischenzuständen, die Länge und Struktur der Zeitfugen, in denen der Prozess noch nicht abgeschlossen ist. In formaler Sprache ist der „anarchische Teil“ die Äquivalenzklasse von (f) modulo der Wertegleichheit, also das, was erhalten bleibt, wenn man alle temporalen Zahlen mit demselben Aggregatwert miteinander vergleicht, anstatt sie zu identifizieren.

Am Beispiel des Paares

```
[  
f(t) =  
\begin{cases}  
99, & t = t_1,\  
1, & t = t_2,\  
0, & \text{sonst},  
\end{cases}  
\quad  
g(t) =  
\begin{cases}  
100, & t = t_1,\  
0, & \text{sonst}  
\end{cases}  
]
```

wird diese Zweiteilung deutlich. Beide temporalen Zahlen besitzen denselben realen Teil, nämlich ($A(f) = A(g) = 100$). Sie unterscheiden sich jedoch in ihrem anarchischen Teil: (f) modelliert einen zweistufigen Prozess mit einem Zwischenzustand der Unvollständigkeit, während (g) einen einstufigen Sprung darstellt, bei dem der Endwert ohne zeitlich ausgedehnte Fuge erreicht wird. Der reale Teil ist identisch, der anarchische Teil ist verschieden.

Diese Unterscheidung ist mathematisch harmlos, aber in politischer und ethischer Hinsicht folgenreich. Viele soziale Systeme sind so organisiert, dass sie fast ausschließlich auf reale Teile reagieren: auf Endwerte, Summen, Kennzahlen. Ob ein bestimmter ökonomischer, gesundheitlicher oder aktivistischer „Output“ in einem Schritt oder in einer Folge von Schritten mit Pausen, Selbstbegrenzungen und Umwegen zustande gekommen ist, spielt im Aggregatraum keine Rolle. Die Geschichte wird zu Gunsten eines skalar dargestellten Resultats systematisch „geflattet“.

Der temporale Zahlenraum macht sichtbar, dass dieser Flatten-Schritt kein naturwüchsiger Zwang ist, sondern eine Modellentscheidung. Man kann ihn vollziehen – dann arbeitet man im Raum der

realen Teile. Man kann ihn aber ebenso gut bewusst aussetzen und auf der Ebene der historischen Pfade bleiben. In diesem Fall erhält der anarchische Teil einer Zahl eigenen epistemischen Rang: Er ist nicht mehr bloß „Rauschen“ um einen Endwert, sondern trägt relevante Information über Belastungsverläufe, Entscheidungsalternativen und Bruchstellen.

Didaktisch und bildungspolitisch ist diese Einsicht nicht trivial. Eine Mathematik, die ausschließlich im Aggregatraum operiert, trainiert den Blick auf Ergebnisse und tendiert zur Unsichtbarmachung von Prozessen. Sie verstärkt jene Logik, in der etwa nur die erreichte Punktzahl, der messbare Output oder der formale Abschluss zählen. Eine Mathematik, die temporale Zahlen und ihre anarchischen Teile zumindest als legitime Erweiterung einführt, vermittelt demgegenüber, dass Wege, Umwege und Abbruchpunkte strukturell ernst zu nehmen sind und nicht bloß subjektive Befindlichkeiten bleiben müssen.

Im Kontext des hier entwickelten Rahmens lässt sich daher festhalten: Der reale Teil einer temporalen Zahl repräsentiert ihre systemkompatible Oberfläche, der anarchische Teil ihre pfadabhängige innere Geschichte. Beide zusammen bilden das volle Objekt. Der klassische Zahlenstrahl entspricht der Wahl, nur mit realen Teilen zu arbeiten und alle anarchischen Teile zu eliminieren. Der temporale Zahlenraum erlaubt, diese Entscheidung zu reflektieren und, wo erforderlich, zurückzuweisen.

6. Zwei Gleichheiten: Wertgleichheit und Prozessgleichheit

Aus der Historienperspektive ergibt sich notwendigerweise eine doppelte Gleichheitsstruktur. Zum einen gibt es die schon eingeführte punktweise Gleichheit ($f = g$) in $(\mathcal{N})(F, T)$: Zwei temporale Zahlen sind identisch, wenn sie dieselbe Geschichte repräsentieren.

Zum anderen ist die Wertgleichheit

$$\left[\begin{array}{l} f \sim g \quad :\Longrightarrow \quad A(f) = A(g) \end{array} \right]$$

eine wesentlich gröbere Relation: Sie identifiziert alle Pfade mit demselben Endwert. Der klassische Zahlenstrahl kann als Quotient $(\mathcal{N})(F, T) / \sim$ verstanden werden; dort existiert nur noch der aggregierte Wert, nicht mehr die Unterschiedlichkeit der Pfade.

Der entscheidende Schritt des temporalen Zahlenbegriffs besteht darin, diesen Quotienten nicht als selbstverständlich oder „natürlich“ zu privilegieren. Prozessgleichheit wird nicht auf Endwertgleichheit reduziert. Damit wird mathematisch ausdrückbar, was in der Ausgangsintuition angelegt war: dass „99 und 9/9“ – als Pfad – etwas anderes ist als „100 auf einen Schlag“, auch wenn beide denselben Endwert liefern.

7. Temporale Zahlen als Pfade im Zustandsraum

Die bisherige Darstellung lässt sich noch weiter schärfen, wenn man temporale Zahlen nicht primär als Funktionen auf einer Zeitmenge, sondern als Pfade in einem Zustandsraum interpretiert. Man betrachte einen Zustandsraum (S), etwa ($S = F$), und eine Klasse von Prozessen, die von einem Anfangszustand zu einem Endzustand führen.

Ein temporaler Zahlprozess kann dann als endliche Sequenz von Aktualisierungen modelliert werden,

$$[s_0 \xrightarrow{a_1} s_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} s_n]$$

wobei die (a_i) elementare „Zahlimpulse“ repräsentieren (z. B. Hinzufügen von 99, später Hinzufügen von 1). Das Aggregat (A) liest aus einem solchen Pfad den Endzustand (s_n) aus. Ein direkter Sprung $(s_0 \rightarrow s_n)$ ist dann ein anderer Prozess als eine feinere Zerlegung über Zwischenzustände, selbst wenn Ausgangs- und Endzustand identisch sind.

In dieser Sichtweise bilden temporale Zahlen nicht nur einen Vektorraum, sondern eine eigene Kategorie:

Objekte sind Zustände (z. B. Zahlen im klassischen Sinn),

Morphismen sind Prozesse (temporale Zahlen als Pfade zwischen Zuständen),

Komposition entspricht der Verkettung von Prozessen.

Die klassische Arithmetik arbeitet implizit mit den Objekten und vergisst die Morphismenstruktur. Die Historienarithmetik rückt umgekehrt die Morphismen in den Vordergrund und behandelt die Endzustände als eine abgeleitete Größe. Die Aussage, dass „99 und 9/9“ nicht dasselbe ist wie „100“, bedeutet dann: Es handelt sich um zwei verschiedene Morphismen mit demselben Zielobjekt.

8. Fachliche Einordnung: Übersetzung, nicht Reduktion

In der Fachmathematik sind die Bausteine, aus denen temporale Zahlenräume konstruiert werden, keineswegs exotisch. Zeitindizierte Vektorräume, endlich unterstützte Funktionsräume, direkte Summen und Pfadräume gehören zum Standardrepertoire. Der hier vorgeschlagene Ansatz beansprucht deshalb nicht, einen völlig neuen algebraischen Objekttyp entdeckt zu haben.

Die eigenständige Leistung besteht vielmehr in der Neujustierung des Blicks:

Erstens wird ein Funktionsraum, der üblicherweise als Raum von Zeitreihen, Signalen oder Zustandsfolgen gelesen wird, explizit als **Zahlenraum** begriffen. Die Pfadstruktur ist nicht Beiwerk, sondern konstitutiver Bestandteil des Zahlbegriffs.

Zweitens wird die Aggregation (A) , die in vielen Anwendungen nur implizit mitläuft, als eigene, ausgezeichnete Abbildung expliziert und zugleich relativiert. Sie ist nicht der natürliche Endpunkt aller Betrachtung, sondern eine von mehreren möglichen Projektionen.

Drittens wird die übliche Praxis, Pfade mit gleichem Endwert zu identifizieren, ausdrücklich nicht mitvollzogen, sondern gerade als problematische Verkürzung markiert. Der temporale Zahlenraum wird so zum mathematischen Gegenentwurf zu einer Logik, die Geschichte systematisch in Ergebnis auflöst.

In diesem Sinn ist die minimalistische Definition über $(\mathcal{N})(F, T)$ eine Übersetzungsschicht: Sie demonstriert, dass der Ansatz sich nahtlos in bekannte Strukturen einfügt, beansprucht aber nicht, die volle epistemische und philosophische Tragweite temporaler Zahlen zu erfassen.

9. Resümee: Temporale Zahlen als Träger von Geschichte

Temporale Zahlenräume sind der Versuch, mathematisch präzise zu fassen, was in vielen existenziellen, ethischen und politischen Debatten mitschwingt: dass es einen Unterschied macht, **wie** ein Ergebnis zustande kommt, nicht nur, **dass** es erreicht wird. Der Übergang von punktförmigen Zahlen zu Prozessobjekten erlaubt, diese Differenz nicht nur metaphorisch zu adressieren, sondern strukturell ernst zu nehmen.

Die klassische Gleichung $99 + 9/9 = 100$ bleibt im Aggregatraum gültig. Im temporalen Zahlenraum hingegen ist sie nur noch eine Aussage über Wertegleichheit, nicht über Identität. Die Entscheidung, ob man den Flatten-Operator (A) anwendet oder nicht, ist damit nicht mehr bloß eine technische, sondern eine begriffliche und – in weiterem Sinne – auch eine normative Entscheidung: ob man Geschichte mitdenken will oder nicht.

Der hier vorgestellte Ansatz versteht sich als Einladung, diese Entscheidung bewusst zu treffen und die etablierten Zahlbereiche als eingebettete Spezialfälle eines reicheren, historienhaltigen Zahlenbegriffs zu betrachten. Die mathematische Übersetzung in zeitindizierte Vektorräume ist dabei ein wichtiges Brückenelement, aber nicht der Ort, an dem das Konzept endet. Entscheidend ist der Schritt darüber hinaus: eine Arithmetik zu entwickeln, die mitnimmt, was vorher geschehen ist.

Lizenzhinweis

Dieses Werk wird unter der **Creative-Commons-Lizenz CC BY 4.0 International** veröffentlicht. Es darf **frei kopiert, verbreitet, verändert und in beliebiger Form weiterverwendet** werden — auch für kommerzielle Zwecke — **sofern die Quelle genannt wird**.

Die korrekte Quellenangabe lautet:

Schmidt, Andre(a): *Temporale Zahlenräume und Historienarithmetik: Von Zuständen zu Pfaden*. AS-Institut, 2025. www.as-institut.de

Mit der Nutzung dieses Werkes erklären sich Dritte einverstanden,

- den Namen der Urheberperson nicht so zu verwenden, dass der Eindruck offizieller Billigung entsteht,
- Änderungen klar kenntlich zu machen,
- die Lizenzbedingungen nicht zu entfernen oder zu verändern
- und einen Link zur Lizenz bereitzustellen:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Das AS-Institut stellt dieses Werk bewusst unter eine freie Lizenz, um die Inhalte **breit zugänglich, rechtssicher teilbar** und **risikominimiert verwendbar** zu machen. Ziel ist es, wissenschaftliche, zivilgesellschaftliche und familiäre Diskurse zu unterstützen, ohne Zugangshürden zu erzeugen.

Für Rückfragen, Feedback oder weiterführende Materialien besuchen Sie bitte:

www.as-institut.de